BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2022

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 22MATGRB1***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
Aéronautique	2
Aménagement finition	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Conception et réalisation des systèmes automatiques	2
Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation	2
Environnement nucléaire	2
Études et économie de la construction	2
Fluides – énergies – domotique	2
Maintenance des systèmes	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de $20\ \mathrm{m.s^{-1}}$ sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.

On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.

On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}8\,y = 4\,,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et où y' est la fonction dérivée de y.

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}8y = 0$.

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}$

b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 5$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

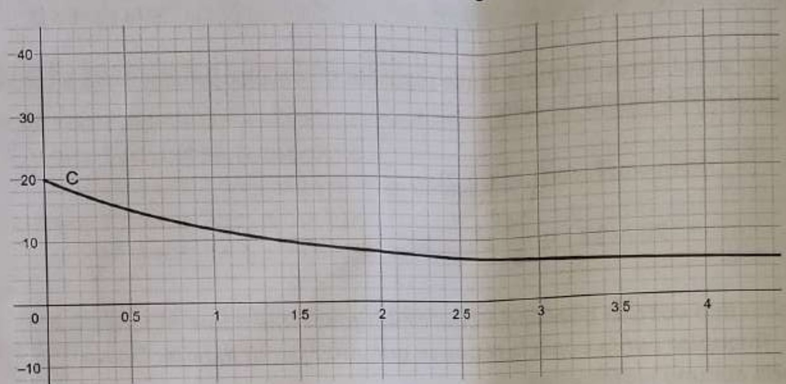
2. On rappelle que $f(0) = 20$.
Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$.

Partie B - Étude de la fonction f .

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5\,.$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1.a. Démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(t) = -12\mathrm{e}^{-0{,}8t}\,.$$

Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(t) = -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5t$.

a. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

b. On admet que la distance d, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1, est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\,.$$

Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner une valeur arrondie au centimètre.

Partie C - Étude locale.

On rappelle que l'on étudie la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0,8t} + 5\ .$$

On rappelle que sa courbe représentative C est reproduite au début de la **partie B**.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

1	PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)
	$\rightarrow\ \mathbf{20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2}$

1. ***Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.***
   Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

$20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2 + \epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$	$20 + \frac{24}{5}t^2$	$20 - 12\,t + 4{,}8\,t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (10 points)

Une usine fabrique des tubes fluorescents. Des tests de conformité permettent de vérifier si les tubes présentent un défaut.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Probabilités conditionnelles.

L'entreprise possède deux ateliers de production des tubes : atelier 1 et atelier 2.

- L'atelier 1 produit 30 % des tubes.
  - Parmi eux, 1,5% présentent un défaut.
- L'atelier 2 produit 70 % des tubes.
  - Parmi eux, 2,5% présentent un défaut.

On prélève au hasard un tube parmi la production totale de l'usine.
On définit les événements suivants :

- A_1 : « le tube provient de l'atelier 1 » ;
- A_2 : « le tube provient de l'atelier 2 » ;
- D : « le tube présente un défaut ».

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$.

3. Montrer que $P(D) = \cancel{0,0195}. = 0,0220$

4. On sait que le tube ne présente pas de défaut.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 ?

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents.

On considère la variable aléatoire T qui, à tout tube fluorescent prélevé au hasard dans le stock, associe sa durée de bon fonctionnement en heure.

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$.

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$	$E(T) = \frac{1}{\lambda}$

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8000 heures.
3. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à $10\,000$ heures.

Partie C - Intervalle de confiance.

La fixation des tubes fluorescents se fait à l'aide de rivets produits dans une usine.
On cherche la proportion p de rivets conformes parmi l'ensemble de la production.

Pour cela, on prélève au hasard dans la production un échantillon de 1000 rivets. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

On constate que, sur les 1000 rivets prélevés, 975 d'entre eux sont conformes.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 rivets ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des rivets conformes.

   On admet que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}}$.
   On donne la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95%.
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\right]$

   Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau de confiance de 95%. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.