Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS Bioqualité, veuillez visiter :
btsbioqualite.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS BIOQUALITÉ • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage (12 questions) **Page 3**

2. Signaux d'entrée et de sortie d'un système électrique et transformées de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbioqualite.fr/assets/annales/bts-bioqualite/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bioqualité - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage

Un chariot de fête foraine, lancé initialement à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son comportement, la distance parcourue et les caractéristiques locales de sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle indiqué l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0{,}8$, donc on obtient la famille suivante sur l'intervalle indiqué.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, ce qui vérifie l'équation pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$.
2. Les solutions générales s'obtiennent en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, $f(0) = 5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$.

On remplace cette constante dans l'expression générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$. Quand $t \to +\infty$, $-0{,}8t \to -\infty$, donc $e^{-0{,}8t} \to 0$. Par conséquent, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

Son équation est $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -12e^{-0{,}8t} < 0$, car l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, f est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse ne s'annule pas à un instant fini, puisque $15e^{-0{,}8t} > 0$ et donc $f(t) > 5$. Elle décroît vers 5, mais ne peut atteindre 0 selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre 0.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$. Donc F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Question 4.b. **Calculer la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de sa vitesse. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$.

Cette valeur vaut environ $15{,}3251$ m, soit $15{,}33$ m au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité à l'ordre 2 s'écrit avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$. Parmi les propositions, cela correspond à la troisième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Ici, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$.

On obtient donc l'équation de la tangente demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Signaux d'entrée et de sortie d'un système électrique et transformées de Laplace

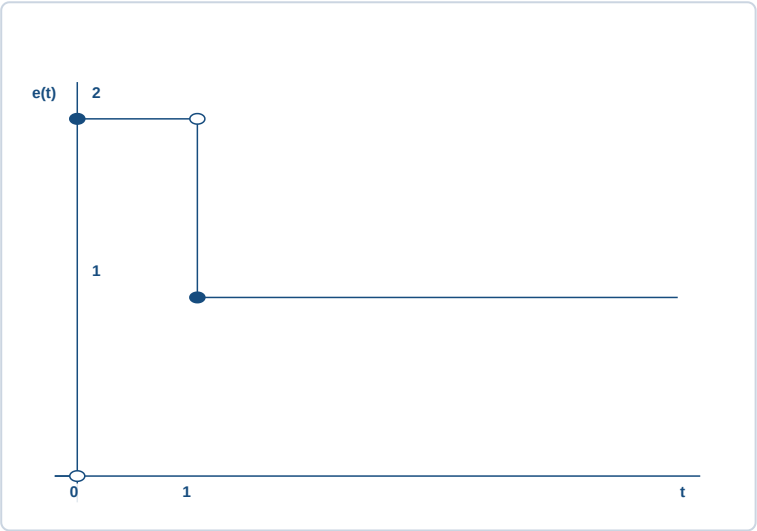
Un système électrique entrée-sortie reçoit un signal causal défini à l'aide de la fonction échelon unité, et sa fonction de transfert est donnée. Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal de sortie, puis à étudier sa représentation graphique et sa limite.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Pour t<0, le signal est nul. Dès t=0, il vaut 2 jusqu'à t=1 exclu. À t=1, le second échelon le fait passer à 1, valeur conservée ensuite. Le tracé comporte donc deux paliers et des sauts en t=0 et t=1.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité et d'après les transformées de $U(t)$ et $U(t-1)$, on obtient $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$. On met ensuite les termes au même dénominateur.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - (1/[p(p + 1)])e^(-p).

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat précédent, puis en distribuant le dénominateur, on obtient bien l'expression demandée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En réduisant au même dénominateur, le numérateur du membre de droite vaut $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de (1/(p + 1))e^(-p), en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne les inverses de $1/p$ et de $1/(p+1)$. Pour les deux autres transformées, le facteur e^{-p} applique un décalage d'une unité : la fonction obtenue est multipliée par $U(t-1)$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - (1/p - 1/(p+1))e^{-p}$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls car $U(t-1) = 0$. Il reste l'inverse du premier terme.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

On remplace t par 1 dans l'expression valable pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En simplifiant, on obtient $2 - 2/e$, soit environ $1,264$. Au dixième, la valeur est donc $1,3$.

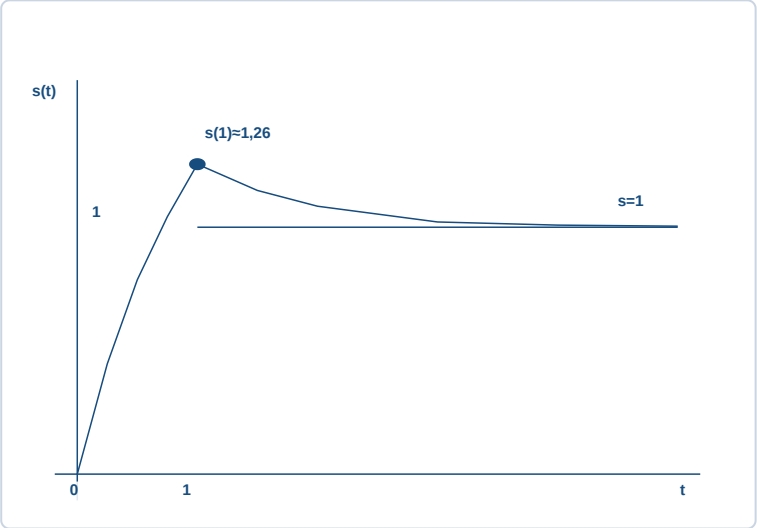
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3.$$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1-e^{-t})$ et monte de 0 à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1,26$. Pour $t \geq 1$, elle suit $1 + (e-2)e^{-t}$, décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale $s = 1$. Le raccord en $t = 1$ est continu.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe croissante de $(0;0)$ à $(1;1,26)$, puis décroissante vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Comme e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel disparaît et il reste le terme constant.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices de dix points étudient le freinage d'un chariot, puis la réponse d'un système électrique par transformées de Laplace, avec équations différentielles, intégration, développements limités et signaux causaux.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, rechercher une solution particulière, puis ajouter les solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle.
- Le décalage f(t - a)U(t - a) correspond en Laplace à F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : vitesse en m/s, temps en secondes et distance en mètres.
- Dans le tableau de variation, indiquer le signe de la dérivée et les limites aux bornes.
- Dans le développement limité, distinguer ε(t) de t^2ε(t).
- Pour un signal décalé, appliquer le facteur e^(-ap) et tenir compte de l'instant du décalage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution d'une équation différentielle linéaire avec un second membre constant ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée. Cherchez ensuite une solution particulière, souvent constante lorsque le second membre est constant, puis additionnez les deux expressions et utilisez la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment déduire une asymptote horizontale à partir d'une limite ?

Calculez la limite de la fonction lorsque la variable tend vers l'infini. Si elle vaut un nombre réel L, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de dix points chacun. Le premier porte sur la vitesse d'un chariot pendant son freinage et le second sur les signaux d'un système électrique.

Q : Quels critères et précautions faut-il respecter dans les réponses ?

Présentez les étapes de calcul et les unités, notamment pour la distance. Donnez la valeur exacte puis l'arrondi demandé, au centimètre ou au dixième selon la question, et utilisez les conventions du formulaire de Laplace.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbioqualite.fr/assets/annales/bts-bioqualite/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bioqualité - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Bioqualité : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.