Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS Bioqualité, veuillez visiter :
btsbioqualite.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS BIOQUALITÉ • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbioqualite.fr/assets/annales/bts-bioqualite/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bioqualité - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres, le temps étant exprimé en secondes. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle puis par une étude de fonction, pour analyser la fermeture et calculer la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l’un de ses facteurs est nul.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D’après le tableau fourni, les solutions sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À l’instant t = 0, le point M est à 20 cm du point O et se déplace vers O à la vitesse négative de −10 cm·s⁻¹. En déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La distance initiale est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La dérivée représente la vitesse de variation de cette distance. Comme la vitesse initiale est $-10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, on a $f'(0) = -10$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2. b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. La distance exacte est cette expression, soit environ $3{,}156705$ cm.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}156705$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est considéré comme fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm, donc la distance est sous le seuil de 0,5 cm. La fonction étant continue et partant de 20 cm, elle devient inférieure à 0,5 cm avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Partie B

Question 1. a. **En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Dans $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, les deux exponentielles tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. La différence de ces deux termes tend donc aussi vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est 0. La courbe se rapproche donc d'une droite horizontale d'ordonnée 0, qui est son asymptote en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On utilise $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, la dérivée de $\frac{70}{3}e^{-t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et celle de $-\frac{10}{3}e^{-4t}$ est $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$ et $f(t)$ tend vers 0.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies au 10^{-2} et l'évaluation de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

La boucle continue tant que $f(t) > 0{,}5$. Le tableau donne les valeurs arrondies au centième et la vérification de la condition à chaque pas de 0,1 seconde.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3. b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

À $t = 3{,}8$, la condition est vraie et l'algorithme ajoute 0,1. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse : la distance est alors inférieure à 0,5 cm.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé.

Question 4. **La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.**

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) + \frac{5}{6}(e^{-16} - 1)\right] = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

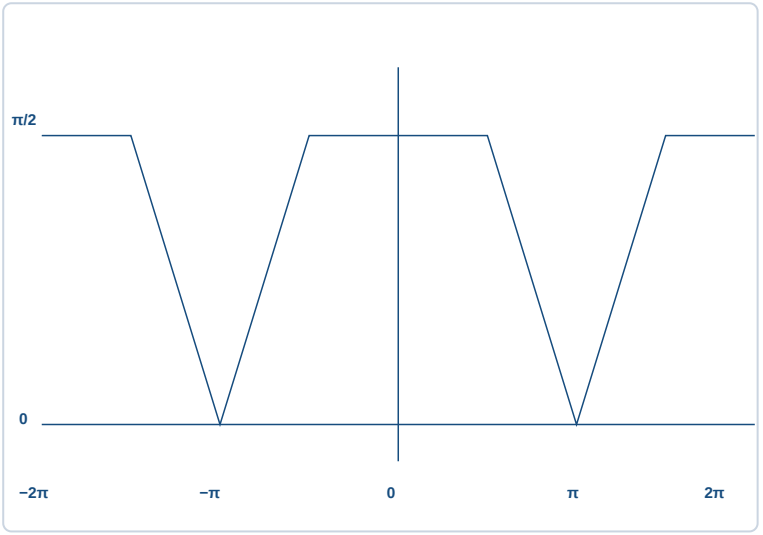
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

Une fonction paire et périodique de période 2π est définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice demande de tracer la fonction, d'établir ses coefficients et une somme partielle de Fourier, puis d'estimer l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition, de sa parité et de sa périodicité.

Sur 0;π/2[, f vaut π/2, puis elle décroît linéairement jusqu'à 0 en π. La parité donne le même motif à gauche de 0. La période 2π répète ce motif : sur [−2π;2π], placer les points de hauteur nulle en −π et π, et les plateaux de hauteur π/2. Relier les points par des segments selon la définition.

Graphe de f sur [−2π ; 2π]



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Graphe pair et de période 2π : plateaux de hauteur π/2, zéros en −π et π, segments reliant ces niveaux.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

D'après le formulaire, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$. La fonction f est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire, donc leur produit est impair. Son intégrale sur un intervalle symétrique de longueur une période est nulle. Cela vaut pour chaque entier $n \geq 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

Le formulaire relie la période et la pulsation par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La période donnée est $T = 2\pi$. En substituant, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation s'exprime en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ est égal à 3π/8.

La formule du formulaire donne $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Par périodicité et parité, cela revient à $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire est celle d'un rectangle de hauteur $\pi/2$; sur $[\pi/2;\pi]$, c'est un triangle de base et de hauteur $\pi/2$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt)dt.

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$. On sépare l'intégrale aux bornes des deux morceaux de la définition : $f(t) = \pi/2$ sur $[0;\pi/2[$, puis $f(t) = \pi - t$ sur $[\pi/2;\pi]$. Dans le premier terme, le facteur $\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$ vaut 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour tout $n \geq 1$.

Question 6. Sachant que aₙ = 2/(πn²)[cos(nπ/2) − cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On applique $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]$ successivement pour $n = 1, 2, 3$. Les valeurs utiles sont $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$, $\cos(3\pi/2) = 0$ et $\cos(3\pi) = -1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) − (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n\cos(nt)$, puisque tous les coefficients sinus sont nuls. En remplaçant a_0 et les trois coefficients calculés précédemment, on obtient directement l'expression de s_3.

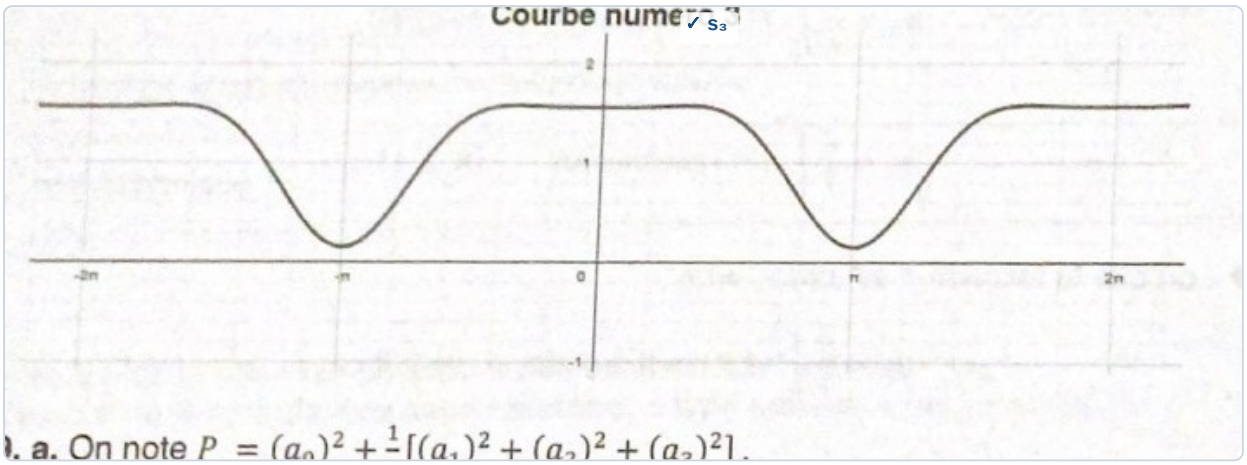
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle présente un maximum arrondi en $t = 0$ et des minima arrondis en $t = \pm\pi$. Parmi les courbes proposées, la courbe numéro 3 correspond à cette forme.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les valeurs exactes des coefficients, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. L'arrondi au dix-millième donne la valeur demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. **La valeur efficace F vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et P constitue une approximation de F^2. Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437178353$ et $F^2 = \pi^2/6$, l'erreur est d'environ $0{,}074\,\%$. Il faut choisir la proposition la plus proche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, groupement B, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices sur 10 étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, résoudre l'équation caractéristique puis utiliser ses racines pour établir la solution générale.
- Dans le modèle du tiroir, f(t) est la distance OM en centimètres et t est le temps écoulé en secondes.
- Pour une fonction de période T, la pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; si la fonction est paire, ses coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire de période T, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour n supérieur ou égal à 1.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et le signe de la vitesse initiale pour déterminer f(0) et f'(0).
- Pour établir l'asymptote horizontale, relier sa valeur à la limite de f(t) lorsque t tend vers $+\infty$.
- Dans l'algorithme, évaluer la condition à chaque valeur de t et distinguer la dernière valeur testée de la valeur finale.
- Pour les séries de Fourier, exploiter la parité et la périodicité et distinguer le coefficient constant a_0 des autres coefficients.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent la forme générale de la solution, puis les conditions initiales déterminent ses constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui entraîne $b_n = 0$.

Q : Comment compléter l'algorithme qui cherche le temps de fermeture ?

Augmentez t par pas de 0,1 seconde tant que f(t) est supérieure à 0,5. Complétez les valeurs arrondies de f(t), puis repérez la première valeur de t pour laquelle la condition devient fausse.

Q : Quelle justification faut-il fournir pour le choix de la courbe ou le pourcentage d'erreur ?

La question 8 demande de choisir la courbe sans justification. Pour la question 9 b, une seule réponse est attendue et le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbioqualite.fr/assets/annales/bts-bioqualite/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bioqualité - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Bioqualité : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.