Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS Bioqualité, veuillez visiter :
btsbioqualite.fr/annales-sujets-et-corriges

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2024

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : 24MATGRB3*

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Électrotechnique	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty\,[$, on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par :

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\,.$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ……
Ligne 4	$t \leftarrow$ …….
Ligne 5	$R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

EXERCICE 2 (10 points)

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On étudie le fonctionnement d'un filtre.

La tension en entrée du filtre est une fonction E pour laquelle on possède les informations suivantes :

- E est une fonction périodique de période $T = 20$.
- $E(t) = \begin{cases} 12 \text{ si } t \in [0; 10[\\ 0 \text{ si } t \in [10; 20[\end{cases}$.

1. On note ω la pulsation de la fonction E.
Vérifier que $\omega = \frac{\pi}{10}$.

2. Représenter la courbe de la fonction E sur votre copie en respectant les consignes suivantes :

- Échelle des abscisses : 2 cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
- Échelle des ordonnées : 1 cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
- La représentation est effectuée pour $t \in [-30\,;\,30]$.

3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de E.

4. On rappelle que la valeur efficace de E, notée E_{eff} est donnée par :

$$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \big(E(t)\big)^2 \mathrm{dt}\,.$$

Montrer que $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_n = \frac{12}{n\pi}\big(1 - \cos(n\pi)\big).$$

Montrer que, lorsque n est pair, on a $b_n = 0$.

7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à $0{,}01$.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n							

8. On considère la grandeur E_7 , définie par :

$$(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}((a_k)^2 + (b_k)^2)\,.$$

Commenter l'affirmation suivante :
« E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de $5\ \%$ d'erreur ».

FORMULAIRE sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{dt}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

La valeur efficace du signal f est notée f_{eff} . Elle est donnée par :

$$(f_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{dt}$$

➔ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.